МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт

з навчальної дисципліни

«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»

(для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 6.050701 – Електротехніка та електротехнології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2017

Методичні вказівки до лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Основи наукових досліджень» (для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 6.050701 – Електротехніка та електротехнології / Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. Ф. Рой, Ю. В. Ковальова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 40 с.

Укладачі: д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Ф. Рой**
канд. техн. наук, асист. **Ю. В. Ковальова**

Рецензенти:

В. М. Рудаков, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

П. П. Рожков, кандидат технічних наук, доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рекомендовано кафедрою систем електропостачання та електроспоживання міст, протокол № 5 від 15.11.2016 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета та завдання вивчення дисципліни «Основи наукових досліджень» − формування у студентів системи теоретичних і практичних знань про наукові підходи до організації досліджень, форми пізнання, закони і методи дослідження в різних галузях науки та техніки. Дисципліна є нормативною, обов'язковою дисципліною у складі фундаментальних і професійно-орієнтованих предметів вищої технічної освіти. В ній викладені основи положення про закони, форми набуття знань, методах досліджень в різних галузях науки та техніки. Програма об’єднує різні наукові підходи до організації експериментальних досліджень. Детально викладається системний підхід в якості основної методології для організації та проведення експериментальних досліджень.

Розглядаються можливі варіанти алгоритмів вирішення оптимізаційних задач, методів кореляційного та дисперсного аналізу, використання теорії масового обслуговування та теорії інформації. Наведені основні кількісні і якісні методи отримання, обробки, аналізу і інтерпретації результатів експерименту, оформлення результатів дослідження та впровадження закінчених розробок.

Завданням вивчення є опанування системного підходу в якості основної методології в організації та проведенні експериментальних досліджень. Найбільш вживаних кількісних та якісних методів обробки отриманих даних і інтерпретації результатів. Способів експериментального визначення статистичних і динамічних залежностей між змінними об’єкта дослідження. Алгоритми вирішення оптимізаційних задач, способи моделювання різноманітних об’єктів дослідження за допомогою сучасного математичного апарата.

Значення курсу полягає у формуванні творчого підходу до професійної діяльності. Визначення статистичних залежностей і законів розподілу на основі даних експерименту. Методу найменших квадратів. Визначення статистичних характеристик випадкових процесів по даним експерименту. Застосування спеціальних методів побудови математичних моделей. Визначення засобів вимірювання та погрішності результатів. Розробка програми і проведення експериментальної частини дослідження. Обробка даних експерименту, аналіз і узагальнення отриманих результатів. Оформлення результатів дослідження.

Лабораторна робота № 1

АПРОКСИМАЦІЯ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ МЕТОДОМ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Основні теоретичні відомості

Під час проведення експериментальних досліджень необхідно здійснювати попереднє оброблення та аналіз отриманих результатів, що дає змогу контролювати досліджуваний процес, коректувати методику і підвищувати його точність та ефективність. Отримані дані заносять у таблиці, ретельно вивчають сумнівні цифри, що різко відрізняються від статистичного ряду середніх значень. У процесі проведення вимірювань неможливо отримати абсолютно точні значення параметрів, оскільки самі вимірювальні прилади мають обмежену точність. Похибки виникають також за рахунок недосконалої методики експерименту, впливу зовнішніх факторів, суб'єктивних особливостей експериментатора. Похибки вимірювань поділяють на *систематичні* й *випадкові.* Систематичні під час повторних вимірах залишаються постійними, а випадкові з'являються при повторних вимірювань у вигляді грубих похибок, які суттєво перевищують систематичні. Основне завдання вимірювань полягає у тому, щоб здійснювати їх з найменшими похибками, використовуючи усі можливі методи виключення систематичних і випадкових помилок. Ефективним методом виявлення систематичних помилок є виключення їх у процесі повторних вимірювань дослідних величин.

Аналіз випадкових похибок базується на теорії випадкових помилок, яка дає можливість з певною гарантією визначити дійсне значення вимірюваної величини і оцінити можливі помилки. Під час оброблення та аналізу результатів експерименту широко використовують методи графічного зображення, оскільки цифрові дані не дозволяють чітко визначити фізичну сутність і динаміку досліджуваного процесу, з'ясувати характер функціональної залежності змінних величин.

Отримані експериментальні (аналітичні) залежності потребують подання (апроксимації) у вигляді емпіричних формул, особливо у тих випадках, коли натурні експерименти виявляються з якихось причин неможливими. Емпіричні формули є наближеним виразом аналітичних залежностей, і повинні найбільш точно відповідати експериментальним даним. Вони дають змогу суттєво розширити можливості експерименту і отримати дані за межами технічних можливостей експериментальної установки.

Графічне зображення результатів експерименту дає наочне уявлення про динаміку і фізичну сутність досліджуваного процесу, зокрема, можливість встановити наявність екстремуму функції, що може бути метою дослідження. Під час дослідження графічним методом функції $y = f(x)$ у системі прямокутних координат наносять значення x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n (рис. 1.1).

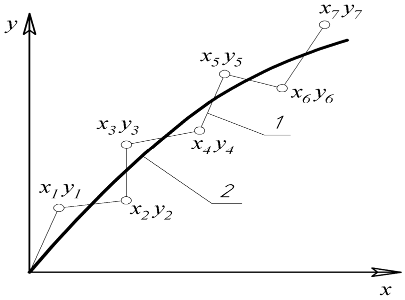

Рисунок 1.1 – Графічне подання функції $y = f(x)$; 1– ламана крива – результат вимірювань; 2 – плавна крива – результат усереднення

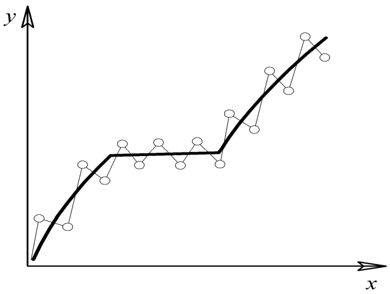

Рисунок 1.2 – Вид функції у = $f(x)$ при наявності стрибка

Для побудови графіка необхідно уявляти орієнтовно хід (динаміку) досліджуваного явища. Функція, як правило, має плавний характер, тому варто проводити криву ближче до експериментальних точок. Якщо одна-дві точки різко віддалені від кривої, необхідно проаналізувати фізичну суть явища і, якщо немає підстави думати про наявність стрибка функції, то це наслідок грубої помилки вимірювань. Тоді потрібно повторити вимірювання у цьому діапазоні (рис. 1.2). У зонах вигину кривої кількість експериментальних точок повинно бути набагато більшим, ніж на плавних ділянках.

Під час графічного зображення результатів вимірювань із трьома змінними $b = f(x,y,z)$, застосовують метод *поділу змінних*. Однієї з величин − z у межах інтервалу вимірювань $z_1 - z_n$ надають кілька послідовних значень, а для інших двох змінних x і y будують графіки $y = f_1(x)$ за z_i = const. У результаті одержують сімейство кривих $y = f_1(x)$ для різних z (рис. 1.3).

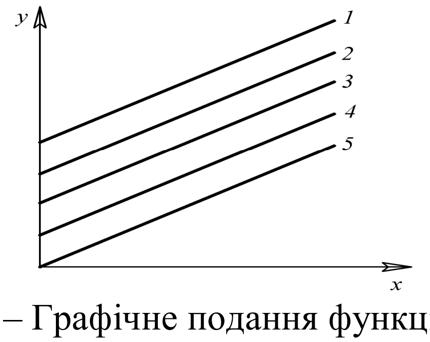

Рисунок 1.3 – Графічне подання функції $b = f(x,y,z)$

Вибір системи координат: *рівномірної, логарифмічної, напівлогарифмічної, імовірнісної* дозволяє наочно уявити вид досліджуваної залежності. Функція $y = f(x)$ у різних системах координат має різну форму, зокрема, нелінійні функції лінеаризуються в логарифмічних координатах, що спрощує процес апроксимації.

Апроксимація результатів експерименту необхідна для розширення можливостей отримання даних про досліджувані явища, що обмежені технічними засобами експерименту або терміном часу.

Якщо маємо статистичний ряд вимірювань функції $y_1, y_2,\ldots,y_n$ залежно від аргументу $x_1, x_2,\ldots, x_n$, то необхідно підібрати аналітичне вираження функції *y=f(x),* яке називають емпіричною формулою. Така процедура називається *апроксимацією*, а відповідні функції – апроксимуючими.

Процес апроксимації складається із двох етапів:

– дані вимірювань наносять на сітку прямокутних координат, з'єднують точки плавною кривою і вибирають орієнтовно вид формули, що описує подібну криву;

– обчислюють параметри формули, яка найкраще відповідає прийнятому аналітичному виразу.

Результати вимірювань багатьох процесів і явищ апроксимуються лінійними емпіричними рівняннями типу:

$$y = a + bx, \tag{1.1}$$

де *a, b* – постійні.

Метод лінеаризації дозволяє подати експериментальну криву лінійною функцією. Для перетворення деякої кривої *y=f(x)* у пряму лінію вводять нові змінні:

$$\begin{cases} X = f_1(x, y), \\ Y = f_2(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

У шуканому рівнянні вони повинні бути пов'язані лінійною залежністю типу

$$Y=a+bX \tag{1.3}$$

Значення *X* и *Y* обчислюють на основі розв’язання системи рівнянь (1.2). Далі будують пряму (рис. 1.4**)**, за якою графічно визначають параметри коефіцієнта *a* (це ордината точки перетинання прямої з віссю *Y*) і *b* – (тангенс кута нахилу прямій з віссю *X*):

$$b = tg\alpha = (Y_i – a)/X_i. \tag{1.4}$$

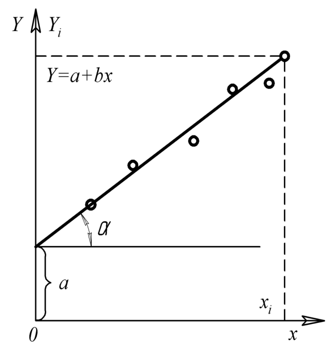

Рисунок 1.4 – Графічне визначення параметрів *a* і *b*

Параметри прямої *a* і *b* можна визначити і методом «двох крайніх точок». У рівняння (1.3) підставляють координати *X, Y* двох крайніх точок з графіка і одержують систему двох рівнянь, з яких визначають коефіцієнти *a* і *b*. Потім одержують емпіричну формулу (1.1), що зв'язує Y і X і дозволяє встановити функціональний зв'язок між x і y та емпіричну залежність $y=f(x)$.

Приклад 1. Підібрати емпіричну формулу для такої вибірки:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	12,1	19,2	25,9	33,3	40,5	46,4	54

Графічний аналіз показує, що експериментальні точки лягають на пряму і їх можна подати залежністю: $y = a + bx$. Підставляємо координати крайніх точок в це рівняння:

$$\begin{cases} a + b*1 = 12{,}1; \\ a + b*7 = 54. \end{cases}$$

Звідки: $a = 5{,}12$; $b = 6{,}98$. Тоді емпірична формула набуває вигляду:

$$y = 5{,}12 + 6{,}98b.$$

Отже, апроксимація даних експерименту лінійними функціями дозволяє легко знайти вид емпіричних формул і за критерієм Пірсона визначити відповідність апроксимуючої формули результатам експерименту.

Зазвичай методом лінеаризації експериментальних кривих замість рівномірних систем координат використовують зміну систем координат на логарифмічну або показову.

Криву виду (рис. 1.5, а) описують формулою:

$$y = ax^b. \tag{1.5}$$

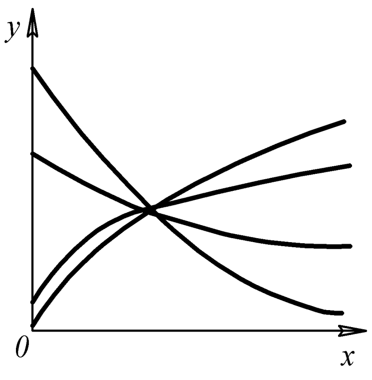

Рисунок 1.5, а – функції $y = ax^b$

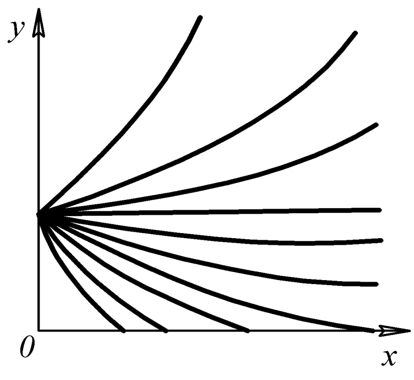

Рисунок 1.5, б – функції $y = ae^{bx}$

Замінивши $X = lgx$ і $Y = lgy$, одержимо: $Y = lga*bX$. Отже, експериментальна крива стає лінійною в логарифмічній сітці.

Криву виду (рис. 1.1, б) описують формулою:

$$y = a \cdot e^{bx} \qquad (1.6)$$

Замінивши $Y = lgy$, одержимо: $Y = lga + bx*lge$, крива перетворюється в пряму лінію в напівлогарифмічній сітці.

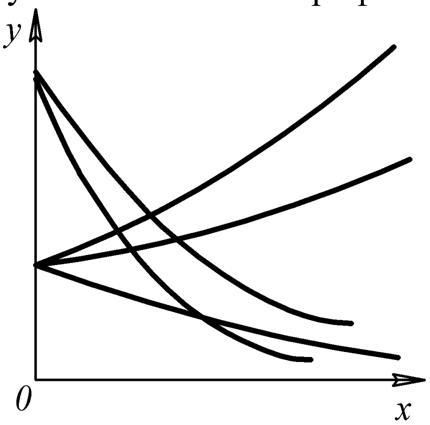

Рисунок 1.5, в – функції $y = c + ax^b$

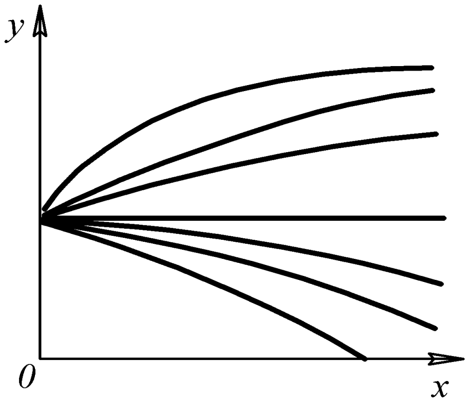

Рисунок 1.5, г – функції $y = c + ae^{bx}$

Криву виду (рис.1.1, в) описують емпіричною формулою:

$$y = c + ax^b. \qquad (1.7)$$

При заданому b, треба прийняти $X = x^b$ і тоді одержимо пряму лінію на сітці прямокутних координат: $y = c + aX$.

Якщо b - невідоме, то приймають $X = lgx$; і $Y = lg(y\text{-}c)$, – тут теж буде пряма лінія, але в логарифмічній сітці координат: $Y = lga + bX$.Тут потрібно спочатку обчислити «c», прийнявши на експериментальній кривій три довільні точки: x_1,y_1; x_2,y_2;$x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$,y_3 і обчислити «c» з виразу:

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}. \qquad (1.8)$$

Криву виду (рис. 1.5, г), описують емпіричною формулою:

$$y = c + ae^{bx}. \qquad (1.9)$$

Замінивши $Y = lg(y - c)$, будують пряму на напівлогарифмічній сітці:

$$Y = lga + bxlgc, \qquad (1.10)$$

де «c» попередньо знайдено за формулою (1.8). Тоді: $x_3 = 0{,}5(x_1+x_2)$.

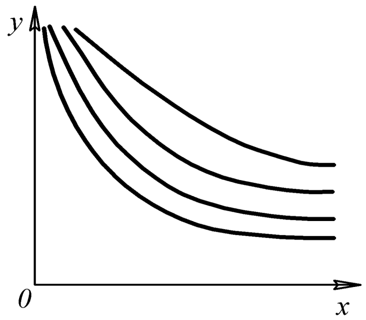

Рисунок 1.5, д – функції y = a + b/x

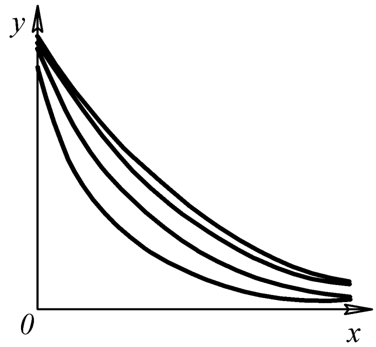

Рисунок 1.5, е – функції y = $\dfrac{1}{(a+bx)}$

Графік вигляду (рис. 1.5, д) описують виразом:

$$y = a + b/x. \tag{1.11}$$

Замінивши $x = 1/z$, одержимо пряму лінію в прямокутних координатах:

$$y = a + bz. \tag{1.12}$$

Графік вигляду (рис. 1.5, е), описують виразом:

$$y = 1\,/\,(a+bx). \tag{1.13}$$

Прийнявши $y = 1\,/\,z$, одержимо: $z = a + bx$, – тобто пряму в прямокутних координатах.

Якщо є рівняння: $y = \dfrac{1}{a+bx+cx^2}$, шляхом заміни $y = 1\,/\,z$, одержимо:

$$z = a + bx + cx^2. \tag{1.14}$$

Складну степеневу функцію $y = ae^{nx+mx^2}$ можна перетворити в просту, прийнявши: $lgy = z$; $lga = p$; $nlge = q$; $mlge = r$ і одержуємо залежність:

$$z = p + qx + rx^2. \tag{1.15}$$

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.
3. Побудувати графік експериментальної залежності $y = f(x)$.
4. Провести плавну криву, рівновіддалену від експериментальних точок.
5. Вибрати із стандартних кривих подібну криву і відповідний їй аналітичний вираз.
6. Лінеаризувати даний аналітичний вираз, отримавши лінійну функціональну залежність $Y = f(X)$.

7. Отримати два рівняння з двома невідомими коефіцієнтами методом двох крайніх точок.

8. Знайти значення цих коефіцієнтів і підставити їх в отриману залежність $Y = f(X)$.

9. Підставити в це рівняння значення аргументу x_i і отримати відповідні розраховані значення функції y_i.

10. Занести в таблицю 1.1 експериментальні і теоретичні значення функції y_e і $y_т$ розрахувати їх різницю Δy.

11. Побудувати на графіку (п.3) розрахункові значення $y_т = f(x)$.

12. Перевірити якість апроксимації за критерієм Пірсона (Кохрена).

13. Сформулювати висновки.

Приклад 1. Підібрати емпіричну формулу для вибірки:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	28	30
y	40	25	18	12	10	8	3	1,5	1,2	1	0,8	0,7	0,6	0,5

Будуємо графік (рис. 1.6). Він відповідний (рис. 1.5, б).

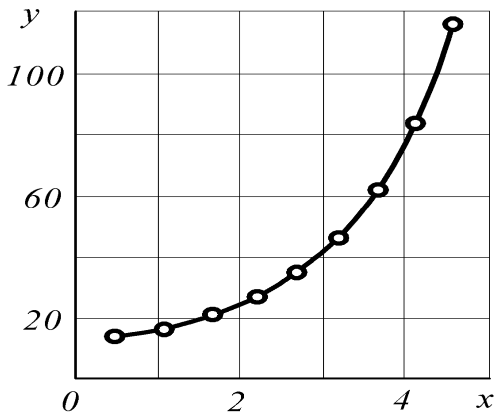

Рисунок 1.6 – Емпірична характеристика

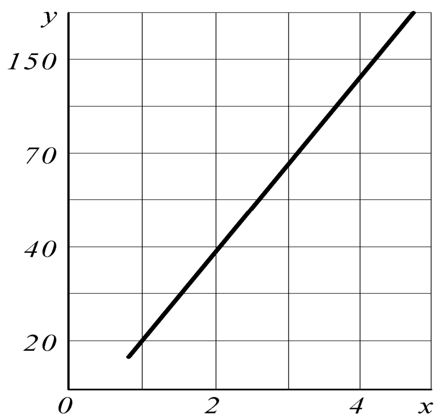

Рисунок 1.7 – Лінеаризована крива

Цьому графіку відповідає формула:

$$y = ae^{bx} \tag{1.16}$$

Після логарифмування отримуємо: $lgy = lga + bxlge$. Позначимо $lgy = Y$, тоді:

$$Y = lga + bxlge, \tag{1.17}$$

тобто в напівлогарифмічних координатах вираз для Y – це пряма (рис. 1.7). Підставивши в рівняння координати крайніх точок одержимо два рівняння з двома невідомими a і b.

$$\begin{cases} lg40 = lga + b2lge; \\ lg0,5 = lga + b30lge. \end{cases} \quad (1.18)$$

Методом підстановки знайдемо значення коефіцієнтів a і b:

$$\begin{cases} lga = lg40 - b2lge \\ lg0,5 = (lg40 - b2lge) + b30lge \end{cases}$$

$b2lge - b30lge = -lg0,5 + lg40;$

$-12,04b = 1,901;$

$b = -0,15$

$lga = lg40 - (-0,15)*2lge$

$lga = 1,73;\ a = 53,7$

(примітка: $lge = 0,43$; $e = 2,7$)

Підставимо значення a і bу формулу (1.16) і остаточно отримаємо:

$$y = 53,7e^{-0,15x} \quad (1.19)$$

Підставимо в цю формулу значення аргументу x і знайдемо відповідні теоретичні значення функції y_1. Результати занесемо в таку таблицю

Таблиця 1.1 – Експериментальні і розрахункові значення функції y

x	y	y_1	Δy
2	40	39,78	0,22
4	25	29,47	-4,47
6	18	21,83	-3,83
8	12	16,17	-4,17
10	10	11,98	-1,98
12	8	8,88	-0,88
14	3	6,58	-3,58
16	1,5	4,87	-3,37
18	1,2	3,61	-2,41
20	1	2,67	-1,67
22	0,8	1,98	-1,18
24	0,7	1,47	-0,77
28	0,6	0,81	-0,21
30	0,5	0,60	-0,10

Побудуємо графіки експериментальної і теоретичної кривої для їх співставлення і оцінки якості апроксимації.

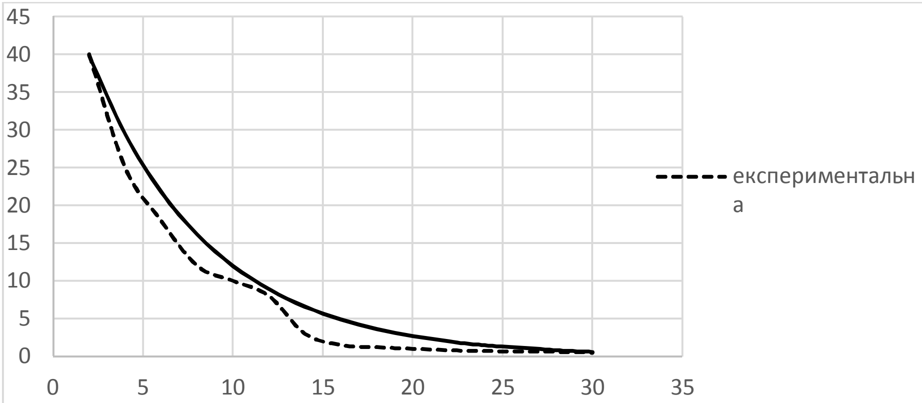

Рисунок 1.8 – Графіки експериментальної і теоретичної кривої

Якість апроксимації перевіряємо за критерієм Пірсона:

$$\chi^2 = \Sigma\, (y_e - y_т)^2 / y_т \tag{1.20}$$

$$\chi^2 = 10{,}95 < 14$$

Згідно з таблицею критеріїв Пірсона ступінь апроксимації задовільна.

Таблиця 1.2 – Критерій Пірсона

χ^2	Значення критерія Пірсона при кількості ступіней свободи q							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,317	0,606	0,801	0,909	0,962	0,985	0,994	0,998
2	0,157	0,367	0,572	0,735	0,849	0,919	0,959	0,981
3	0,083	0,223	0,391	0,557	0,700	0,806	0,885	0,934
4	0,045	0,135	0,261	0,406	0,549	0,767	0,079	0,854
5	0,025	0,083	0,171	0,287	0,415	0,543	0,660	0,757
6	0,014	0,049	0,111	0,199	0,306	0,423	0,539	0,647
7	0,008	0,030	0,071	0,135	0,220	0,320	0,428	0,536
8	0,004	0,018	0,046	0,091	0,156	0,238	0,332	0,433
9	0,002	0,011	0,020	0,061	0,109	0,173	0,252	0,342
10	0,001	0,006	0,018	0,040	0,075	0,124	0,188	0,265
11	0,000	0,004	0,011	0,026	0,051	0,088	0,138	0,201
12	–	0,002	0,007	0,017	0,034	0,062	0,100	0,151
13	–	0,001	0,004	0,011	0,023	0,043	0,072	0,111
14	–	0,000	0,002	0,007	0,014	0,029	0,036	0,059
15	–	–	0,001	0,004	0,010	0,020	0,030	0,042

Висновок: (оцінити якість проведеної апроксимації).

Контрольні запитання

1. З якою метою здійснюється апроксимація результатів експерименту?
2. Якими способами можна лініаризувати нелінійну функцію?
3. Як лініаризувати функцію з трьома невідомими коефіцієнтами?
4. Назвіть послідовність процесу отримання емпіричної формули.

Лабораторна робота № 2

КОМПЬЮТЕРНО-ГРАФІЧНА АПРОКСИМАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПОЛІНОМАМИ

Основні теоретичні відомості

Для апроксимації отриманих експериментальних кривих, що не можуть бути описані простими аналітичними формулами, використовують *поліноми* виду:

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_{12}x^{12}, \tag{2.1}$$

тут $A_o, A_1, \ldots A_n$ – постійні невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити.

Поліноми дозволяють апроксимувати будь-які залежності, якщо вони є безперервними функціями. Під час визначення коефіцієнтів A використовують *методи середніх* і *найменших квадратів*.

Послідовність розрахунку коефіцієнтів A полінома така. Визначаємо число членів ряду (2.1) (звичайно 3÷4). У прийняте вираження послідовно підставляємо координати x і y експериментальних точок і одержуємо систему з m рівнянь. Кожне рівняння прирівнюємо відповідному відхиленню:

$$\begin{cases} A_o + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \ldots A_nx_1^n - y_1 = \varepsilon_1; \\ A_o + A_1x_1 + A_2x_2^2 + \ldots A_nx_2^n - y_2 = \varepsilon_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_o + A_1x_m + A_2x_m^2 + \ldots A_nx_m^n - y_m = \varepsilon_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

Кількість точок (рівнянь) повинно бути не менше кількості коефіцієнтів A, що дозволить їх обчислити розв’язанням рівнянь (2.2). Рівняння розбиваємо послідовно зверху вниз на групи, кількість яких дорівнює кількості коефіцієнтів $A_{o.}$. У кожній групі складаємо рівняння і одержуємо нову систему рівнянь, рівну кількості груп (зазвичай 2÷3). Вирішуючи системуNрівнянь з nневідомими, обчислимо значення коефіцієнтів A.

Точність розрахунків можна підвищити, згрупувавши початкові умови по 2÷3 варіанти і обчислити для кожного варіанта емпіричну формулу. Перевагу має формула, у якої $\Sigma\varepsilon^2 = min$.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.
3. Побудувати графік експериментальної залежності $y = f(x)$.
4. Провести плавну криву, рівновіддалену від експериментальних точок.
5. Записати поліном 3-го порядку.
6. Методом підстановки в поліном даних експерименту, отримати n рівнянь.
7. Скласти в стовпчик складові рівнянь таким чином, щоб отримати три рівняння з трьома невідомими коефіцієнтами A_0, A_1, A_2.
8. Методом підстановки, Гауса або матричним визначити коефіцієнти полінома і підставити їх у рівняння, отримуючи остаточний вид полінома.
9.Побудувати графік теоретичній залежності функції y від значень аргументу x на графіку п.3.
10. Побудувати таблицю експериментальних $y_е$ і теоретичних $y_т$ значень функцій і в залежності від аргументу x і розрахувати їх різницю Δy.
11. Перевірити якість апроксимації за критерієм Пірсона (χ^2).
12. Сформулювати висновок.

Приклад 1. Виконано сім вимірювань:

x	4	5	6	7	8	9	10
y	10,2	6,7	4,8	3,6	2,7	2,1	1,7

Для визначення емпіричної формули вибираємо поліном виду:

$$y = A_o + A_1 x + A_2 x^2 \tag{2.3}$$

Підставляємо в це рівняння результати вимірювань і отримаємо систему початкових рівнянь:

$$\begin{cases} A_o + 4A_1 + 16A_2 - 10{,}2 = \varepsilon_1; \\ A_o + 5A_1 + 25A_2 - 6{,}7 = \varepsilon_2; \\ A_o + 6A_1 + 36A_2 - 4{,}8 = \varepsilon_3; \\ A_o + 7A_1 + 49A_2 - 3{,}6 = \varepsilon_4; \\ A_o + 8A_1 + 64A_2 - 2{,}7 = \varepsilon_5; \\ A_o + 9A_1 + 81A_2 - 2{,}1 = \varepsilon_6; \\ A_o + 10A_1 + 100A_2 - 1{,}7 = \varepsilon_7, \end{cases} \tag{2.4}$$

які можна згрупувати на три групи. Складемо рівняння в кожній підгрупі:

$$\begin{array}{ll} \text{1-а група:} & \\ \text{2-а група:} & \\ \text{3-а група:} & \end{array} \begin{cases} 2A_o + 9A_1 + 41A_2 = 16{,}9; \\ 2A_o + 13A_1 + 85A_2 = 8{,}4; \\ 3A_o + 27A_1 + 245A_2 = 6{,}5. \end{cases} \tag{2.5}$$

Визначивши із цих рівнянь коефіцієнти A_o, A_1 і A_2, одержимо шукану емпіричну формулу:

$$y = 26,1 - 5,2x + 0,28x^2. \qquad (2.6)$$

Підставляємо в формулу (2.6) значення аргументів x і отримуємо розраховані значення функції y, які заносимо в таблицю і будуємо в графічному вигляді.

Приклад 2. Вихідні дані:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	8,7	7	6,4	5,1	4,2	3,4	2,2

Будуємо графік за вихідними даними

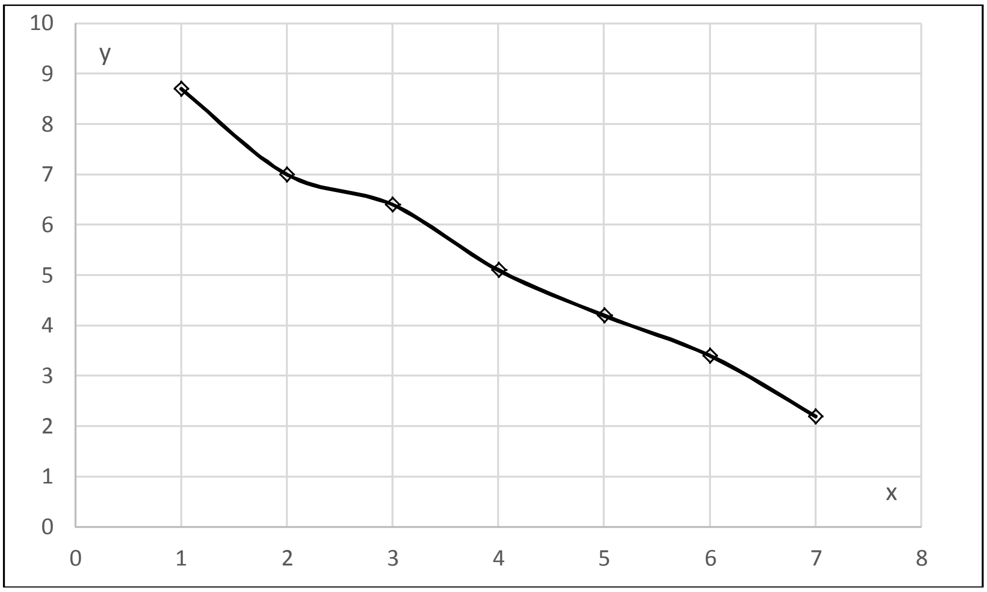

Рисунок 2.1 – Графік вихідної експериментальної кривої

Апроксимуємо поліномом, що змінюється за законом

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 \qquad (2.7)$$

Підставимо значення всіх точок x і y:

$$\begin{cases} A_0 + 1A_1 + 1A_2 = 8,7 \\ A_0 + 2A_1 + 4A_2 = 7 \\ A_0 + 3A_1 + 9A_2 = 6,4 \\ A_0 + 4A_1 + 16A_2 = 5,1 \\ A_0 + 5\,A_1 + 25A_2 = 4,2 \\ A_0 + 6A_1 + 36A_2 = 3,4 \\ A_0 + 7A_1 + 49A_2 = 2,2. \end{cases}$$

Методом складання отримаємо три рівняння з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2A_0 + 3A_1 + 5A_2 = 15{,}7 \\ 2A_0 + 7A_1 + 25A_2 = 11{,}5 \\ 3A_0 + 18A_1 + 110A_2 = 9{,}8. \end{cases}$$

Далі знайдемо значення коефіцієнтів A_0, A_1, A_2 методом Крамера, Гауса, матричним або підстановкою

$$\begin{cases} A_0 = 9{,}48; \\ A_1 = -1{,}11; \\ A_2 = 0{,}012. \end{cases}$$

Підставимо ці значення коефіцієнтів в поліном і отримаємо робочу формулу

$$y = 9{,}48 - 1{,}11x + 0{,}012x^2. \qquad (2.8)$$

Підставляючи в (2.8) значення аргументу x, отримаємо відповідні теоретичні значення функції y_1,які занесемо в таблицю2.1 і будуємо графіки експериментальної і теоретичної залежностей.

Таблиця 2.1 – Експериментальні і теоретичні результати вимірів

x	1	2	3	4	5	6	7
y	8,7	7	6,4	5,1	4,2	3,4	2,2
$y1$	8,38	7,31	6,26	5,23	4,23	3,25	2,30
Δy	0,32	– 0,31	0,14	–0,13	–0,03	0,15	–0,10

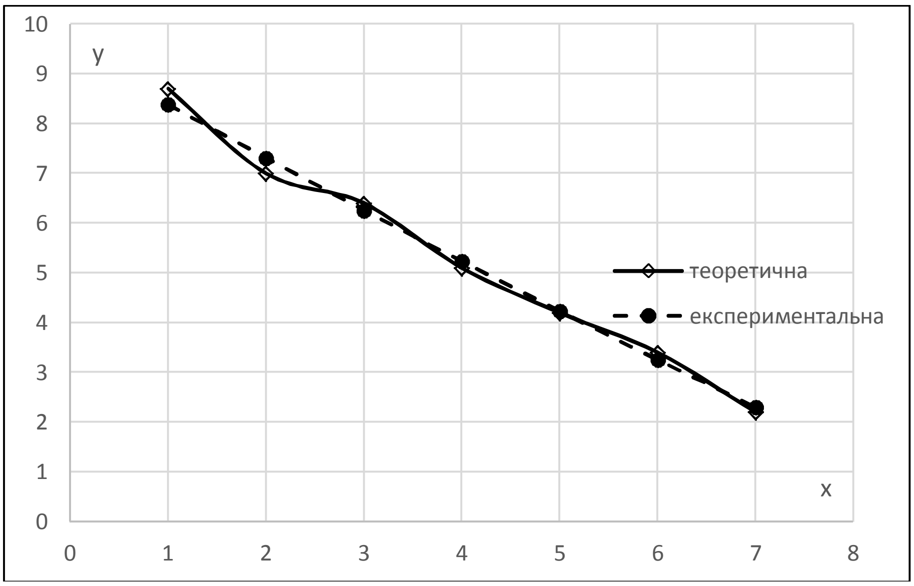

Рисунок 2.2 – Графіки експериментальної і теоретичної залежностей

Проведемо перевірку якості апроксимації за критерієм Пірсона:

$$\chi^2 = \Sigma(Y-Y_1)^2 / Y_1 \qquad (2.9)$$

$$\chi^2 = \Sigma\Delta Y < N$$

$$\chi^2 = 0{,}042 < 7.$$

Висновок: (оцінити якість проведеної апроксимації).

Контрольні запитання

1. Які експериментальні залежності можна апроксимувати поліномами ?
2. Назвіть послідовність процесу апроксимації.
3. Назвіть методи визначення коефіцієнтів полінома.

Лабораторна робота № 3

ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Основні положення теорії випадкових помилок

Отримані експериментальні дані потребують відповідного оброблення і подання результатів у вигляді графіків, таблиць, формул, статистичних оцінок. Графічна інформація дає змогу наглядно визначити залежність результатів експерименту Y від одної (X_1) або двох (X_1, X_2) змінних. У разі великої кількості змінних, необхідно подавати результати у вигляді аналітичних залежностей.

Статистичні оцінки дають інформацію про всю сукупність даних і про адекватність причинно-наслідкових відношень. Необхідна оцінка розходження результатів теоретичних розрахунків з експериментальними даними.

Теорія випадкових помилок дає змогу оцінити точність результатів за даної кількості вимірювань або визначити мінімальну кількість вимірювань, що гарантують задану точність. Для великої вибірки ($n \geq 30$) і нормального закону розподілу оціночною характеристикою результату вимірювань є *дисперсія D* і *коефіцієнт варіації $k_в$*:

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / (n-1); \; k_в = \sigma / \bar{x}. \qquad (3.1)$$

Дисперсія D характеризує однорідність виміру; коефіцієнт варіації $k_в$ – мінливість вимірів *щодо середніх значень*.

Чим більша дисперсія, тим більший розкид результатів вимірювань. Чим більший коефіцієнт варіації, тим більший розкид результатів відносно середніх вимірювань.

Довірчим називають інтервал значень x_i, у який попадає істинне значення $x_д$ вимірюваної величини із заданою імовірністю.

Довірчою імовірністю $p_д$ вимірювання називається імовірність того, що істинне значення вимірюваної величини потрапляє в певний довірчий інтервал:

$a \le x_\partial \le b$ і вимірюється у відсотках або в частках одиниці. Довірча імовірність p_∂ описується виразом:

$$p_\partial = p[a \le x_\partial \le b] = (1/2)\ [\varphi(b - \overline{x}))/\sigma - \varphi(a - \overline{x}) / \sigma], \tag{3.2}$$

де $\varphi(t)$ – інтегральна функція Лапласа, обумовлена виразом:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_i} e^{-t^2/2} dt\,. \tag{3.3}$$

Таблиця 3.1 – Інтегральна функція Лапласа

t	p_∂	t	p_∂	t	p_∂
0,00	0,0000	0,75	0,5467	1,50	0,8664
0,05	0,0399	0,80	0,5763	1,55	0,8789
0,10	0,0797	0,85	0,6047	1,60	0,8904
0,15	0,1192	0,90	0,6319	1,65	0,9011
0,20	0,1585	0,95	0,6579	1,70	0,9109
0,25	0,1974	1,00	0,6827	1,75	0,9199
0,30	0,2357	1,05	0,7063	1,80	0,9281
0,35	0,2737	1,10	0,7287	1,85	0,9357
0,40	0,3108	1,15	0,7419	1,90	0,9426
0,45	0,3478	1,20	0,7699	1,95	0,9488
0,50	0,3829	1,25	0,7887	2,00	0,9545
0,55	0,4177	1,30	0,8064	2,25	0,9756
0,60	0,4515	1,35	0,8230	2,50	0,9876
0,65	0,4843	1,40	0,8385	3,00	0,9973
0,70	0,5161	1,45	0,8529	4,00	0,9999

Аргументом цієї функції є відношення довірчого інтервалу μ до середньоквадратичного відхилення σ тобто:

$$t = \mu/\sigma, \tag{3.4}$$

де t – гарантійний коефіцієнт.

Довірчий інтервал:

$$\mu = b - \bar{x}\ ;\ \mu = -(a - \bar{x}\ ). \tag{3.5}$$

Якщо задано довірчу імовірність p_∂ (0,9; 0,95), то встановлюється точність вимірювань (довірчий інтервал 2μ) на основі співвідношення: $p_\partial = \varphi(\mu / \sigma)$. Половина довірчого інтервалу дорівнює:

$$\mu = \sigma \arg\varphi(p_\partial) = \sigma t, \tag{3.6}$$

де $\arg\varphi(p_\partial)$ – аргумент функції Лапласа, а за $n < 30$ – функції Стьюдента.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.
3. Розрахувати середньо квадратичне відхилення ряду вибірки σ.
4. Розрахувати величину дисперсії результатів вимірів D.
5. Для заданої згідно завдання довірчої імовірності $p_д$ визначити величину довірчого інтервалу μ за формулою (3.6) і таблиці 3.1.
6. Згідно виразу (3.4) по знайденим значенням σ і μ визначити гарантійний коефіцієнт t.
7. Для заданої кількості вимірів N_{min} за формулою (3.10) визначити точність отриманих результатів Δ для заданої кількості вимірів.

Приклад 1. Проведено 30 вимірювань електричної міцності ізоляції при напрузі U_p = 170 кВ і обчислено середньоквадратичне відхилення σ = 3,1 кВ.

Необхідну точність вимірювань можна визначити для різних рівнів довірчої імовірності: $p_д$ = 0,9; 0,95; 0,997, прийнявши значення t за табл. 3.1. Тоді відповідно:

$\mu = \pm 3{,}1 \cdot 1{,}65; = 5{,}1$; $\mu = \pm\, 3{,}1 \cdot 2{,}0 = 6{,}2$; $\mu = \pm 3{,}1 \cdot 3{,}0 = 9{,}3$ (кВ).

Звідки видно, що для цього методу довірчий інтервал зростає вдвічі у разі збільшенні $p_д$ усього на 10 %.

Для визначення достовірності вимірювань для заданого довірчого інтервалу (наприклад: $\mu \pm 7$ кВ), згідно з формулою (3.4) маємо: $t = \mu / \sigma = 7 / 31 = 2{,}26$.

Далі за таблицею Лапласа (3.1) для $t = 2{,}26$ знаходимо: $p_д = 0{,}97$. Це означає, що в заданий довірчий інтервал із 100 вимірювань не потрапляють 3.

Величина (1-$p_д$) – це *рівень значимості*, з якого випливає, що за нормального закону розподілу похибка, що перевищує довірчий інтервал, буде зустрічатися один раз із n_u вимірювань, де:

$$n_u = p_д/(1 - p_д). \tag{3.7}$$

Звідки можна вирахувати кількість вимірювань, з яких одне вимірювання перевищить довірчий інтервал: за $p_д$ = 0,9: n_u = 0,9 / (1–0,9) = 9.

Визначення необхідного мінімальної кількості вимірювань

За статистичних методів оцінювання точності отриманих результатів важливим завданням є визначенні мінімально необхідної кількості вимірювань N_{min} при заданих значеннях довірчого інтервалу 2μ і довірчій імовірності $p_д$. Під час вимірювань необхідно визначити їхню точність:

$$\Delta = \sigma_o / \overline{x}, \tag{3.8}$$

де σ_o- середньоарифметичне значення середньоквадратичного відхилення σ, рівне: $\sigma_o = \sigma / \sqrt{n}$ – це *середня помилка*.

Довірчий інтервал помилки вимірювання Δ визначається аналогічно для вимірювань $\mu = t \cdot \sigma_{o.}$ За допомогою t можна визначити довірчу імовірність помилки вимірювань з таблиці Лапласа (3.1).

Якщо за заданою точністю Δ і довірчою імовірністю вимірювань необхідно визначити мінімальну кількість вимірювань, що гарантують необхідну точність Δ і p_∂, то аналогічно (3.6) із урахуванням (3.7) запишемо:

$$\mu = \sigma \arg \varphi\ (p_Д) = \sigma_{про} / \sqrt{n}\, t. \tag{3.9}$$

За $N_{min} = n$ – одержуємо:

$$N_{min} = \sigma^2 t^2 / \sigma^2{}_o = k^2{}_в t^2 / \Delta^2, \tag{3.10}$$

де $к_в$ – коефіцієнт варіації, %; Δ– точність вимірювань, %.

Послідовність визначення мінімальної кількості вимірювань N_{min} наступна:

1. Здійснюють експеримент з n = 20÷50 вимірювань.
2. Обчислюють середньоквадратичне відхилення за формулою (3.1).
3. Встановлюють необхідну точність Δ вимірювання (не повинна перевищувати точності приладів).
4. Встановлюють нормоване відхилення t (звичайно задається).
5. За формулою (3.10) розраховують величину N_{min}.

Приклад 2. Необхідно зробити 25 вимірювань розмірів деталі; припустиме відхилення ±0,1 м. Обчислене σ = 0,4 м дозволяє оцінити достовірність вимірювань. З (3.9) можна записати: $t = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\Delta}{\sigma} = \sqrt{25} \cdot (0{,}1/0{,}4) = 1{,}25$.

З таблиці Лапласа (3.1) довірча імовірність p_∂ для t = 1,25: p_∂ = 0,79.

Це низька імовірність, оскільки похибка перевищує довірчій інтервал

2μ=0,2 м і згідно з ф. (3.6) буде зустрічатися один раз із 0,79/(1–0,79)=3,37, тобто з 4-х вимірювань, − що неприпустимо.

З’ясуємо мінімальну необхідну кількість вимірювань з довірчою імовірністю p_∂ = 0,9 і p_∂ = 0,95.

За ф. (3.9) за p_∂ = 0,9 $N_{min} = 0{,}42 \cdot 1{,}65^2 / 0{,}1^2 = 43$ вимірювань і за p_∂ = 0,95 необхідно 64 вимірювання, що перевищує задані 25 вимірювань.

Цей метод за допомогою σ і σ_o придатний для кількості вимірювань n > 30. В протилежному випадку за *малих вибірок* використовують метод Стьюдента. Для малої вибірки довірчий інтервал:

$$\mu_{ст} = \sigma_o \cdot \alpha_{ст}, \tag{3.11}$$

де $\alpha_{ст}$ – коефіцієнт Стьюдента (табл. 3.2). Звідки, знаючи $\mu_{ст}$, дійсне значення вимірювальної величини для малої вибірки дорівнює:

$$x_{д} = \bar{x} \pm \mu_{ст}. \tag{3.12}$$

Можна за відомими n знайти довірчу імовірність $p_{д}$ за умови, що погрішність середнього значення вимірювань не вийде за межі $\pm \mu_{ст}$. Послідовність рішення така: визначають середнє значення $\bar{x}$, $\sigma_{о}$, $\alpha_{ст} = \mu_{ст} / \sigma_{о}$. Знаючи $\alpha_{ст}$ і n, з табл.3.2 визначають шукану довірчу імовірність.

Таблиця 3.2 – Коефіцієнт Стьюдента $\alpha_{ст}$

n	$p_{д}$					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
2	3,080	6,31	12,71	63,70	127,30	637,20
3	1,886	2,92	4,30	9,92	14,10	31,60
4	1,638	2,35	3,188	5,94	7,50	12,94
5	1,533	2,13	2,77	4,60	5,60	8,61
6	1,436	2,02	2,57	4,03	4,77	6,86
7	1,440	1,94	2,45	3,71	4,32	9,96
8	1,415	1,90	2,36	3,50	4,03	5,40
9	1,397	1,86	2,31	3,36	3.83	5,04
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,363	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,350	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
16	1,341	1,75	2,13	2,96	3,29	4,07
18	1,333	1,74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,328	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,316	1,70	2,04	2,75	3,20	3,65
40	1,306	1,68	2,02	2,70	3,12	3,55
50	1,298	1,68	2,01	2,68	3,09	3,50
60	1,290	1,67	2,00	2,66	3,06	3,46
∞	1,282	1,64	1,96	2,58	2,81	3,29

Приклад 3. Проведено 18 вимірювань (табл. 3.3). Визначено: σ=6,58; $к_{в}$ = 8,91%. Для точності Δ = 5% і 3% за довірчої імовірності $p_{д}$ = 0,95: $\alpha_{ст}$ = 2,11. Тоді для Δ = 5% кількість вимірювань $N_{min} = (8{,}91^2 \cdot 2{,}11^2) / 5^2 = 14$, а для Δ = 3%: $N_{min} = (8{,}91^2 \cdot 2{,}11^2) / 3^2 = 40$.

Висновок: (визначити, чи достатня кількість вимірювань для заданої точності результатів).

Таблиця 3.3 – Результати вимірювань та їх оброблення

x_i	x_i-$\overline{x}$	x_i-$\overline{x}$	$(x_i$-$\overline{x})^2$
67	- 8	- 7,83	64
67	- 8	- 7,83	49
68	- 7	- 6,83	49
68	- 7	- 6,83	36
69	- 6	-5,83	25
70	- 5	-4,83	16
71	- 4	-3,83	4
73	- 2	-1,83	1
74	- 1	-0,83	0
75	0	+0,17	1
76	+1	+1,17	4
77	+2	+2,17	9
78	+3	+3,17	16
79	+4	+4,17	25
80	+5	+5,17	36
81	+6	+6,17	49
82	+7	+7,17	289
92	+17	+17,27	
$\bar{x}$ =74,83	Σ=−3	Перевірка−46,5+46,5	Σ=737

Приклад 4. Маємо вибірку з 30 вимірювань. Оцінити точність вимірювань

4,88	4,99	5,03	4,87	5,04	4,95	5,01	5,12	5,16	5,08	5,07	4,92	4,93	4,91	4,98
5,11	4,9	5,07	5,21	4,91	4,96	4,97	5,04	5,04	4,97	5,04	5,14	5,13	4,92	5,1

За теорією випадкових помилок знайдемо Δ, якщо:

$$N_{\min} = k_в^{2} t^2 / \Delta^2, \tag{3.13}$$

де $k_в$ – коефіцієнт варіації;
$N_{\min}$ – мінімальна необхідна кількість вимірів для заданої точності;
Δ – похибка вимірювання. Тоді:

$$\Delta = \sqrt{\frac{kв^2 \times t^2}{Nmin}}, \tag{3.14}$$

де t − квантіль нормального розподілу;

σ^2 = ((4,88–5,015)^2+(4,99–5,015)^2+(5,03–5,015)^2+(4,87–5,015)^2+(5,04–5,015)^2+(4,95–5,015)^2+(5,01–5,015)^2+(5,12–5,015)^2+(5,16–5,015)^2+(5,08–5,015)^2+(5,07–5,015)^2+(4,92–5,015)^2+(4,93–5,015)^2+(4,91–5,015)^2+(4,98–5,015)^2 +(5,11–5,015)^2+(4,9–5,015)^2+(5,07–5,015)^2+(5,21–5,015)^2+(4,91–5,015)^2+(4,96–5,015)^2+(4,97–5,015)^2+(5,04–5,015)^2+(5,04–5,015)^2+(4,97–5,015)^2+(5,04–5,015)^2+(5,14–5,015)^2+(5,13–5,015)^2+(4,92–5,015)^2+(5,1–5,015)^2)/29=0,00831552.

σ=0,091189; $k_в$=0,091189/5,015=0,018183.

Звідки точність вимірювань Δ = 0,9%.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення і назвіть фізичну суть дисперсії.
2. На чому базується теорія випадкових помилок?
3. Дайте визначення поняттю «довірча імовірність $p_д$.
4. Як визначити коефіцієнт варіації і що він означає?
5. Що таке «гарантійний коефіцієнт t?

Лабораторна робота № 4

ВИЗНАЧЕННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ

Важливим моментом при проведенні досліджень є необхідність визначити достовірність і повторюваність отриманих експериментальних результатів. В процесі обробки експериментальних результатів необхідно виключити грубі помилки шляхом використання *правила трьох σ*, яке наголошує: розкид випадкових величин від середнього значення не повинен перевищувати

$$x_{max}, x_{min} = \bar{x} \pm \sigma \qquad (4.1)$$

Приклад 1. Міцність зразків до термооброблення: $R_1 = \bar{R}_1 \pm \sigma_о$=20±0,5 Н, а після термообробки: $R_2 = \bar{R}_2 \pm \sigma_о$=23±0,6 Н. Приріст міцності складає 15%.

Чи є це дійсний приріст міцності? Перевірку робимо за умовою:

$$\bar{x} / \sigma_1 \geq 3. \qquad (4.2)$$

Перевіряємо різницю міцності: $\bar{x} = R_1 – R_2$=3 Н. Помилка вимірювань $\sigma_о = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, тоді: $(R_1 - R_2) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ = 3 / (0,25 + 0,36) = 3,84 > 3.

Висновок: приріст міцності є достовірним.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.

3. Розрахувати середнє значення ряду вибірки $\bar{x}$.

4. Розрахувати середньо квадратичне відхилення ряду вибірки σ.

5. Розрахувати величину дисперсії результатів вимірів D.

6. Для заданої згідно завдання довірчої імовірності $p_д$ визначити величину довірчого інтервалу та відхилення за формулою (4.2).

7. За формулами (4.3) та (4.4) і табл. 4.1 визначити наявність грубих помилок ряду вибірки.

Методи на основі використання довірчого інтервалу більш ефективні. Якщо маємо статистичний ряд малої вибірки, що відповідає закону нормального розподілу, то критерії визначення грубих помилок визначають за формулами:

$$\beta_1 = (x_{max} - \bar{x}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n}\ ; \tag{4.3}$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{min}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n}\ , \tag{4.4}$$

тут x_{max}, x_{min} – найбільша та найменша величина із n вимірювань.

Максимальні значення $\beta_{\max}$ залежно від довірчої імовірності $p_д$, що виникають унаслідок статистичного розкиду, наведені в табл. 4.1. Якщо $\beta_1 > \beta_{\max}$,то величину x_{max} виключають як грубу помилку. Якщо $\beta_2 < \beta_{\max}$ виключають величину x_{min}. Після виключення грубих помилок визначають нові значення x і σ із (n – 1) або (n – 2) вимірювань.

Таблиця 4.1 – Критерій появи грубих помилок

n	$\beta_{\max}$ при $p_д$			n	$\beta_{\max}$ при $p_д$		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,80
4	1,64	1,69	1,72	16	2,35	2,52	2,84
5	1,79	1,87	1,96	17	2,38	2,55	2,87
6	1,89	2,00	2,13	18	2,40	2,58	2,90
7	1,97	2,09	2,26	19	2,43	2,60	2,93
8	2,04	2,17	2,37	20	2,45	2,62	2,96
9	2,10	2,24	2,46	25	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	30	2,61	2.79	3,16
11	2,19	2,34	2,61	35	2,67	2,85	3,22
12	2,23	2,39	2,66	40	2,72	2,90	3,28
13	2,26	2,43	2,71	45	2,76	2,95	3,33
14	2,30	2,46	2,76	50	2,80	2,99	3,37

Методи визначення точності відносних вимірів

Важливим завданням теорії випадкових помилок є визначення помилок функції типу $y = f(x_1, x_2,...,x_n)$. При дослідженні функції одного змінного, граничні *абсолютні помилки* $\varepsilon_{гр}$ і *відносні* $\delta_{від}$ розраховують таким чином:

$$\varepsilon_{гр} = \pm\varepsilon_x f'(x), \quad (4.5)$$

$$\delta_{від} = \pm d\ln(x), \quad (4.6)$$

де $f'(x)$ – похідна функції $f(x)$; $d\ln(x)$ диференціал логарифма функції.

Якщо досліджується функція багатьох змінних, то:

$$\varepsilon_{гр} = \pm\sum_{1}^{n}\frac{df(x_1, x_2 \ldots x_n)}{dx_i}dx_i, \quad (4.7)$$

$$\delta_{від} = \pm d\,|\,\ln(x_1, x_2 \ldots, x_n)\,|, \%. \quad (4.8)$$

Послідовність визначення помилок така:

1. Спочатку визначають абсолютні та відносні помилки аргументів (незалежних змінних), які зазвичай відомі: $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{x2}, \ldots \varepsilon_{xn}$.
2. Визначають відносні помилки незалежних змінних:

$$\delta_{x1} = \varepsilon_{x1} / x_д;\ \delta_{x2} = \varepsilon_{x2} / x_д,\ \ldots,\ \delta_{xn} = \varepsilon_{xn} / x_д. \quad (4.9)$$

3. Визначають часткові диференціали функції $f'(x)$.
4. За формулою (4.7) визначають $\varepsilon_{гр}$ у розмінностях функції $f(y)$.
5. Згідно формули (4.8) визначають $\delta_{від}$.

Важливим завданням теорії вимірювань є встановлення ***оптимальних умов*** (границь) вимірювань, коли виконуються умови: $\delta_{гр} = \delta_{грmin}$.

Методика розв’язання цієї задачі така. Під час дослідження функції з однією невідомою змінною беруть першу похідну по x, прирівнюють її до нуля і знаходять x_1. Якщо друга похідна по x_1позитивна, то функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у випадку: $x = x_1$ – має мінімум.

За наявності декількох змінних – похідні беруть по всім $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і в результаті мінімізації функцій встановлюють оптимальний інтервал вимірювань (інтервал напруги, сил струму, температур тощо) кожній функції, за якої відносна помилка вимірювань δ_{xi} буде мінімальною.

Висновки: (Проаналізувати точність проведених відносних вимірів)

Контрольні запитання

1. Як визначається абсолютна і відносна помилки вимірів?
2. Як визначити оптимальні умови вимірювань?
3. Наведіть критерії визначення грубих помилок.
4. Сформулюйте правило трьох σ.

Лабораторна робота № 5

ДОСЛІДЖЕННЯ АДЕКВАТНОСТІ ТЕОРЕТИЧНИХ РІШЕНЬ

Основні теоретичні відомості

Оцінка адекватності теоретико-експериментальних рішень ґрунтується на використанні довірчих інтервалів, що дають змогу з заданою достовірною імовірністю визначити шукане значення оцінюваного параметру. Сутність такої перевірки складається в співставленні отриманої або передбачуваної теоретичної функції $y = f(x)$ із результатами експерименту. Встановлення адекватності полягає у визначенні похибки апроксимації дослідних даних.

Одним із статистичних критеріїв визначенні помилки апроксимації дослідних даних для малих вибірок є *критерій Фішера*. Для цього розраховують експериментальне значення критерію Фішера $k_{фэ}$ і порівнюють із теоретичним (табличним) $k_{фт}$, за необхідної довірчої імовірності $p_д$ (зазвичай $p_д = 0,95$). Якщо при цьому $k_{фэ} < k_{фт}$ – то модель є адекватною.

Дослідний критерій Фішера обчислюють за формулою:

$$k_{фд} = D_a / D_{ср}, \tag{5.1}$$

де D_a – дисперсія адекватності; $D_{ср}$– середня дисперсія всього експерименту, обчислені таким чином:

$$D_a = \frac{\sum_1^n (y_{it} - \bar{y}_{iэ})^2}{n-d}; \tag{5.2}$$

$$D_{ср} = \frac{\sum_1^m \sum_1^n (y_{iT} - y_{iэ})^2}{mn}, \tag{5.3}$$

де y_{it} – теоретичне значення функції для кожного з вимірювань;

$y_{iэ}$ – експериментальне значення функції; $\bar{y}_{iэ}$ – середнє експериментальне значення функції з m серій; n – число вимірювань в одному досліді; d – число коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії.

Значення $k_{фт}$ беруть із таблиці (5.1) для довірчої імовірності $p_д = 0,95$ і числа ступенів свободи $q_1 = n - d$; $q_2 = n(m - 1)$. У ф. (5.2) y_{iT} обчислюють за теоретичною регресією для фактора x_i; $\bar{y}_i$ – визначають як середнє з m серій вимірювань, тобто:

$$\bar{y}_{iэ} = \frac{1}{m}(y_{1э} + y_{2э} + \ldots + y_{mэ}). \tag{5.4}$$

Таблиця 5.1 – Критерій Фішера

q	Значення $k_{фт}$ за $p_д = 0{,}95$ для різних q_2								
	1	2	3	4	5	6	12	24	36
1	16	19	21	22	23	23	24	24	24
2	18	19	19	19	19	19	19	19	19
3	10	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4.5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,7	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,7
60	4,0	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.
3. Розрахувати середнє експериментальне значення функції $y_{iэ}$ із mсерій вимірів.
3. Розрахувати середньо квадратичне відхилення ряду вибірки σ.
4. Визначити число коефіцієнтів рівняння теоретичній регресії d.
5. За формулою (5.2) розрахувати величину дисперсії адекватностіD_a.
6. За формулою (5.3) розрахувати спочатку дисперсію D_i для кожної строки.
7. Розрахувати середню дисперсію D_{cp}.
8. За формулою (5.1) визначити $k_{фд}$.
9. Порівняти величину $k_{фд}$ з табличним (5.1) значенням $k_{фт}$, і зробити висновок про адекватність апроксимації.

Приклад. 1. Отримано теоретичне вираження: $y = 80x$ і для підтвердження проведений експеримент із $m = 5$ серій по $n = 7$ вимірювань (табл. 5.2). Встановити адекватність теоретичного вираження.

Таблиця 5.2 – Результати вимірювань

Номер досліду	x_i	$y_{1є}$	$y_{2є}$	$y_{3є}$	$y_{4є}$	$y_{5є}$	$y_{iє}$	y_{iT}	Δy_i		$\sum_1^m (y_{im} - y_{i\,е})^2$
1	0,2	12	17	15	14	16	14,8	16	2.3	1,44	4,4
2	0,3	23	21	24	25	23	23,2	24	0,8	0,64	2,4
3	0,4	30	34	31	35	35	33,0	32	1,0	1,00	3,8
4	0,5	38	43	40	39	42	40,4	40	0,4	0,16	3,6
5	0,6	52	47	48	49	40	47,2	48	0,8	0,64	16,4
6	0,7	59	58	55	54	53	55,8	56	0,2	0.04	5,4
7	0,8	62	66	62	61	63	62,8	64	1,8	1,44	4,4
Разом										5,36	40,4

За ф. (5.2) визначаємо дисперсію адекватності $D_a = 5{,}36 / (7 - 1) = 0{,}89$. Тут $d = 1$, тому що в теоретичному вираженні – один значущий член x.

Дисперсія $D_{ср}$ спочатку обчислюється для кожної з m строк:

Для першої строки:

$D_1 = \Sigma(y_{\text{іт}} - y_{\text{іэ}})^2 / m = 1/5[(12 – 16)^2 + (17 – 16)^2 + (15 – 16)^2 + (14 – 16)^2 = 4{,}4$;

Для другої строки:

$D_2 = 1/5[(23 – 24)^2 + (21 – 24)^2 + (24 – 24)^2 + (25 – 24)^2 + (23 – 24)^2] = 2{,}4$ і т. д.

Середня дисперсія всього експерименту буде

$$D_{ср} = \sum_1^n D_i / n = 40{,}4 / 7 = 5{,}77. \qquad (5.5)$$

Потім за ф. (5.1) $k_{фэ} = D_a / D_{ср} = 0{,}89 / 5{,}77 = 0{,}15$.

Теоретичні значення критерію Фішера можна визначити з табл. 5.1. Збіжності експериментальної і теоретичної регресії за наступних ступенів свободи: $q_1 = 7 – 1 = 6$ і $q_2 = 7(5 - 1) = 27$, $k_{фт} = 3{,}75$. Оскільки $k_{фэ} = 0{,}15 < k_{фт} = 3{,}75$, то модель адекватна з довірчою імовірністю 95%.

Для великих вибірок застосовують *критерій Пірсона*, відповідно до якого гіпотеза про закон розподілу підтверджується, якщо виконується умова:

$$p(\chi^2, q) > \alpha = 1 - \varphi(x). \qquad (5.6)$$

Тут $\alpha = 1 - \varphi(x)$ – рівень значущості, прийнятий як 0,1; χ – критерій згоди Пірсона; q – число ступенів свободи, рівне:

$$q = m - s, \qquad (5.7)$$

де m – кількість груп (серій, розрядів) великої вибірки або кількість вимірів в одній серії; s – кількість використовуваних зав'язків.

Значення χ^2– обчислюють за формулою

$$\chi^2 = \sum_{1}^{m} (y_{эi}–y_{mi})^2 / y_{mi}, \qquad (5.8)$$

де $y_{эi}$, y_{mi} – кількість вимірювань у кожній групі серій згідно з даними експерименту і теоретичною кривою.

Порядок виконання роботи

1. Отримаємо велику вибірку з N статистичних вимірювань.

2. Розбиваємо їх на m діапазонів: $x_1…x_2$; $x_3…x_4$; $x_5...x_6$ і т.д.

3. За даними вимірювань у кожному діапазоні може виявитися $y_э$ вимірювань (частота); наприклад, у діапазоні $x_1…x_2$ буде $y_{э1}$ вимірювань, у наступному числовому діапазоні $x_3…x_4$ буде $y_{э2}$ вимірювань і т. д. Тоді визначаємо $\sum_{1}^{m} y_{эi} = N$.

4. За даними вимірів будуємо експериментальну криву частот $y_{эi} = f(x)$ або $y_{эi} / N = f(x)$. Цю криву можна апроксимувати теоретичною кривою (законом Пуассона, показовим, логарифмічним, нормальним та ін.). Для цієї теоретичної кривої встановлюють експериментальні частоти появи значення y_{mi} у цьому діапазоні.

5. Обчислюємо критерій Пірсона χ^2 і порівнюємо його з таблицею 1.2.

Приклад 2. Проведено $n = 250$ вимірювань величини x_i. Необхідно визначити закон розподілу. Розбиваємо вибірку $y_{эi}$ на сім груп, результати вимірювань нанесемо на сітку в прямокутних координатах і встановлюємо, що крива близька до закону нормального розподілу, за якою визначають відповідні теоретичні частоти:

1	23	50	82	58	28	2
1	27	57	80	57	27	1

і за формулою (5.8) обчислюємо критерій згоди χ^2:

$\chi_1^2 = (1–1)^2/1+(23–27)^2/27+(50–57)^2/57+(82–80)^2/80+(58–57)^2/57+(58–57)^2/57+(28–27)^2/27+(2–1)^2/1=2,56$

За кількістю розрядів m=7, констант нормального закону $s = 2$, $q = 7 – 2 = 5$. За табл. 5.3 відповідно до p(2,56;5) визначаємо $\chi^2 = 0,774$. Оскільки 0,774 > 0,10, то адекватність є задовільною.

Контрольні запитання

1. Визначте поняття «довірчого інтервалу».
2. Умови застосування критеріїв Пірсона і Фішера?
3. Як визначити дисперсію адекватності D_a?
4. Як визначити середню дисперсію результатів вимірів?

Лабораторна робота № 6

ІМОВІРНОСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ
(Визначення закону розподілу за даними експерименту)

Основні теоретичні відомості

Під час дослідження стохастичних процесів основним завданням є визначення *закону розподілу* випадкових величин − це будь-яке правило, що дає змогу знайти імовірність *p* можливих випадків, пов'язаних із цією величиною. Методами математичної статистики, яка проводить оброблення і аналіз емпіричних подій, доведено, що імовірність появи випадкової величини підлягає певній закономірності. Для таких статистичних законів теорія ймовірностей дає змогу визначити середній результат випадкових подій тим точніше, чим більше числа аналізованих подій. Ці дві науки складають єдину математичну теорію масових випадкових процесів.

Математична статистика оперує поняттям *частоти події* $\bar{y}(x)$, яка дорівнює відношенню кількості випадків $n(x)$, коли відбулась ця подія, до загальної кількості подій *n*:

$$\bar{y}(x) = n(x) / n. \tag{6.1}$$

У разі зростання кількості подій частота $\bar{y}(x)$ *прямує до імовірності* $p(x)$.

Частота появи y_{oi} – це ряд розподілу (рис 6.1), а плавна крива – це закон(функція) розподілу $F(x)$.

Імовірність $p(x)$ події x – це відношення кількості випадків $N(x)$, які призводять до появи події x, до загального числа можливих випадків N:

$$p(x) = N(x) / N. \tag{6.2}$$

Імовірність випадкової величини (події) x – це кількісна оцінка можливості її появи. Достовірна подія має імовірність $p = 1$. Для випадкової події $0 \le p(x) \le 1$, а сума ймовірностей усіх можливих значень:

$$\sum_{0}^{n} p_i = 1. \tag{6.3}$$

Основні характеристики функції розподілу. Необхідно мати характеристики функції розподілу: *середньоарифметичне* і *математичне очікування*, *дисперсію, розмах ряду розподілу.* Якщо серед *n* подій випадкова величина x_i повториться n_1 раз, величина x_2 - n_2 раз і т. д., то середньоарифметичне значення *x* дорівнює:

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} (x_i n_i)/n. \tag{6.4}$$

Розмах можна використовувати для оцінки *варіації* ряду подій R:

$$R = x_{max} - x_{min}, \tag{6.5}$$

Тут x_{max}, x_{min} – значення обмірюваної величини або погрішності.

Замінивши замість емпіричних частот $y_1, \ldots, y_n$ їхніми ймовірностями $p_1,\ldots,p_n$, одержимо важливу характеристику розподілу – *математичне очікування:*

$$m(x) = \sum_{1}^{n} x_i p_i\ . \tag{6.6}$$

***Приклад** 1*. Маємо 5 вимірювань однієї вибірки:

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$ з ймовірностями: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}45$; $p_4 = 0{,}3$; $p_5 = 0$.

Тоді середня величина $x = 15 / 5 = 3$, а математичне очікування відповідності $m(x) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0 / 15 + 3 \cdot 0{,}45 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0 = 2{,}95$.

Для випадкових безперервних величин математичне очікування дорівнює:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx, \tag{6.7}$$

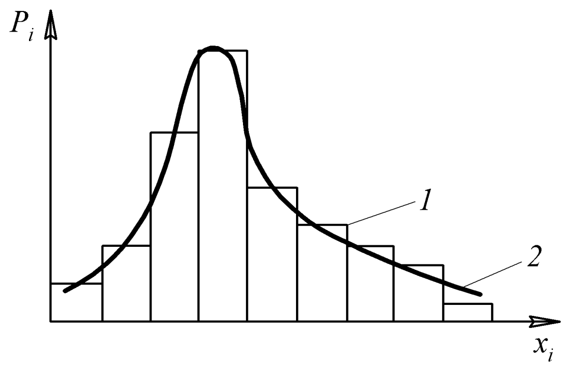

Рисунок 6.1 – Розподіл випадкових величин: 1 − гістограма 2 − крива розподілу.

Якщо систематичні погрішності вимірювань повністю виключені, то дійсне значення вимірюваної величини дорівнює математичному очікуванню. Однакову площу під кривою розподілу можна описати різними кривими – це означає, що вони можуть мати різне *розсіювання*. Мірою розсіювання (точності вимірювання) є *дисперсія* або *середньоквадратичне відхилення*.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини стосовно математичного очікування і визначається таким чином:

$$D(x) = \sum_{1}^{n} (x_i - m(x))^2 \cdot p_i, \tag{6.8}$$

тоді:

$D(x) = (1-2{,}95)^2 \cdot 0{,}1 + (2-2{,}95)^2 \cdot 0{,}15 + (3-2{,}95)^2 \cdot 0{,}45 + (4-2{,}95)^2 \cdot 0{,}3 + (5-2{,}95)^2 \cdot 0 = 0{,}83$.

Важливою характеристикою кривої розподілу є *середньоквадратичне відхилення*

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}. \quad (6.9)$$

Коефіцієнт варіації

$$k_в = \sigma / m(x). \quad (6.10)$$

Він визначається у відносних одиницях ($k_в$ < 1)і використовується для порівняння інтенсивності розсіювання в різних сукупностях.

Основним завданням статистики є підбор теоретичних кривих за наявним емпіричним законом розподілу. Якщо при n вимірювань випадкової величини отриманий ряд її значень: x_1, x_2, x_3,…,x_n, то під час обробки таких рядів їх групують в інтервали і встановлюють для кожного частоти появи: y_i і y_{oi}. Потім за значеннями x_i і y_{oi} будують східчасту гістограму частот і обчислюють характеристики емпіричної кривої розподілу.

Основними характеристиками емпіричного розподілу такі: *середньоарифметичне значення:*

$$x = \sum_{1}^{n} x_i / n; \quad (6.11)$$

дисперсія:

$$D = \sum_{1}^{n} (x - \bar{x})^2 / n; \quad (6.12)$$

середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (6.13)$$

Значення цих величин відповідають величинам $\bar{x}$, $D(x)$ і $\sigma(x)$ теоретичного розподілу.

Найбільш часто використовують ***закон нормального розподілу*** *(закон Гауса)*, що найчастіше зустрічається в практиці. Головна його особливість полягає в тому, що він є *граничним* законом, до якого зводяться інші закони в більшості реальних ситуацій. Він характеризується *щільністю* імовірності наступного виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{[x - m(x)]^2}{2\sigma^2} \right] \quad (6.14)$$

За $m(x) \neq 0$ це рівняння відповідає функції нормального розподілу.

Тут максимальна ордината кривої рівна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ і відповідає точці $x = m$. Під час видалення від точки m щільність розподілу падає і за $x > \pm$ крива розподілу наближається до осі абсцис. Параметр m – математичне очікування, $\sigma = \sqrt{D}$ середнє квадратичне відхилення величини x (рис. 6.2).

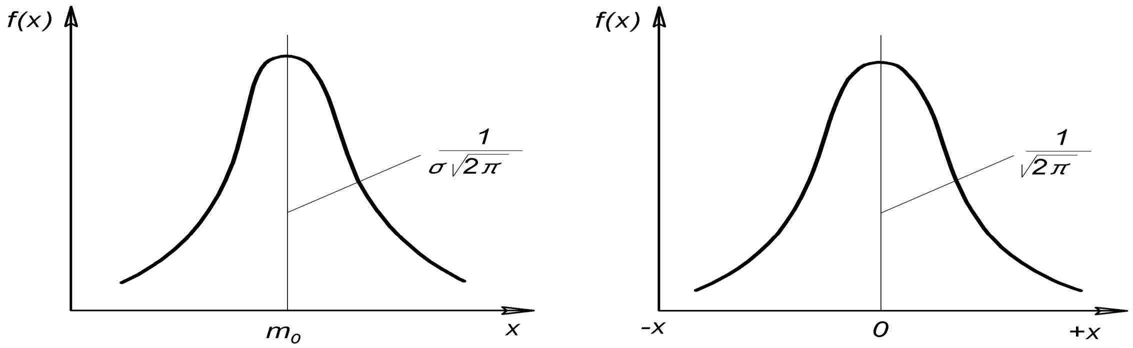

Рисунок 6.2 – Крива нормального розподілу: а) – $m(x) \neq 0$; б) – $m(x) = 0$.

Якщо пересунути вісь ординат в точку m: $m(x) = 0$ і прийняти $\sigma^2 = 1$, то закон нормального розподілу описується формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{6.15}$$

Оцінка розсіювання здійснюється за величиною σ − чим вона більша, тим більше розсіювання, а максимум кривої розподілу ($\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$) зменшується. Величина $y = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}}$ за $\sigma = 1$, або $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ − є *мірою точності*.

Імовірність того, що випадкові події не вийдуть із діапазону відхилення $+\sigma$, $-\sigma$, становить 0,683.

Для діапазону $\pm\, t\cdot\sigma$ імовірність влучення події x_i обчислюють згідно з розподілом Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^t e^{-x_i^2}\,dx \tag{6.16}$$

Під час аналізу рідких випадкових дискретних процесів використовують *розподіл Пуассона*. Імовірність появи кількості подій x=1,2,3,..в одиницю часу дорівнює:

$$p(x) = \frac{m^x}{x} e^{-m} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \tag{6.17}$$

де x − кількість подій за цей відрізок часу t;

λ – щільність (середня кількість подій за одиницю часу);

$\lambda\cdot t$ – кількість подій за час t; $\lambda\cdot t = m$.

Для закону Пуассона дисперсія дорівнює математичному очікуванню числа настання подій за час t, тобто $\sigma^2 = m$.

Приклад 2. За 5 хв. під навантаження подається 6 машин. Яка імовірність $p(x)$ надходження за 5 хв. 10 машин?

Тут: $x = 10$, $\lambda\cdot t = 6$; тоді $p(x) = (\sigma^{10} e^{-6}) / 10! = 0{,}041$.

Отже, імовірність дуже мала.

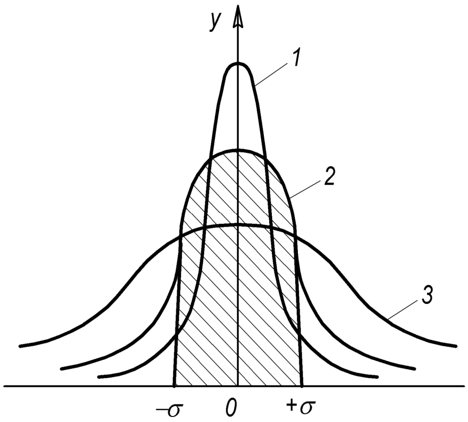

Рисунок 6.3 – Розсіювання кривій нормального розподілу:
1 –σ = 0,5;2 –σ = 1; 3 – σ = 2.

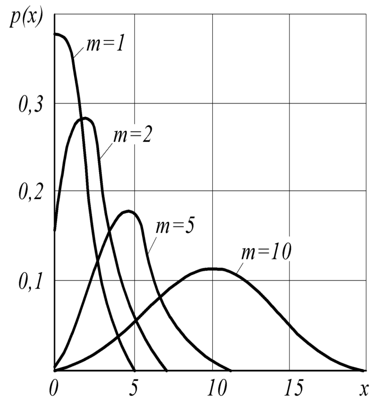

Рисунок 6.4 – Криві розподілу Пуассона.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.
2. Отримати індивідуальне завдання у викладача.
3. Розділити діапазон отриманих значень x вимірюваної величини на числові інтервали з виразу $k = 1 + 3{,}3\ lgn$.
4. Розрахувати числові величини границь інтервалів: $x_i — x_{i+1}$.
5. Вирахувати число m_i^*, величин, що потрапили у кожній з інтервалів.
6. Визначити частоту потрапляння цих чисел у кожний інтервал, поділивши число m_i^* на загальну кількість вимірів *n*.
7. Побудувати статистичний ряд результатів вимірювань згідно табл. 6.2.
8. Накреслити графічно гістограму статистичного ряду згідно рис. 6.1.
9. На вісі абсцис відкласти інтервали і на кожному з інтервалів збудувати прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного інтервалу. Для побудови гістограми потрібно частоту кожного інтервалу поділити на його довжину і отримане число взяти за висоту прямокутника. За способом побудови гістограми її повна площа повинна дорівнювати 1.
10. Здійснити візуальну оцінку отриманій гістограмі щодо відповідності її закону нормального розподілу випадкових чисел.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.18}$$

11. Обчислити параметри закону нормального розподілу − математичне очікування (середнє вибіркове) m_x і середньоквадратичне відхилення σ_x за формулами:

$$M^*[x] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = m_x^* \tag{6.19}$$

$$D^*[x]=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}(x_i-m_x^*)^2 \tag{6.20}$$

$$\sigma^*[x]=\sqrt{D^*}[x] \tag{6.21}$$

12. Обчислити довірчий інтервал для оцінки математичного очікування для довірчої імовірності $\beta=0{,}8$.

$$\sigma_{\tilde{m}}=\sqrt{\frac{D^*}{n}}; \tag{6.22}$$

$$\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right); \tag{6.23}$$

$$\varepsilon_\beta=\sigma_{\tilde{m}}\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right); \tag{6.24}$$

$$I_\beta=\left(\tilde{m}-\varepsilon_\beta;\tilde{m}+\varepsilon_\beta\right). \tag{6.25}$$

13. Нанести на гістограму (рис. 6.1) криву щільності імовірності нормального закону розподілу, побудовану з урахуванням обчислених параметрів та цінити близькість теоретичного і експериментального розподілів за допомогою критерію Пірсона χ^2.

14. Знайти імовірність влучення випадкових чисел в інтервали за формулою

$$p_i=\Phi^*\left(\frac{x_{i+1}-m_x^*}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{x_i-m_x^*}{\sigma}\right), \tag{6.26}$$

де x_i, x_{i+1} границі і-го інтервалу.

Помістити отримані значення в таблицю для порівняння.

Таблиця 6.2 – Таблиця для порівняння

Границі інтерва-лів	-4,167 - (-3,316)	-3,316 - (-2,466)	-2,466 - (-1,616)	-1,616 - (-0,766)	-0,766 - 0,083	0,083 - 0,933	0,933 - 1,783	1,783-2,634	Σ
p_i	0,0009	0,01	0,05	0,17	0,29	0,27	0,14	0,04	0,99
pn_i	0,097	1,0005	5,6	17,3	29,4	27,5	14,2	4,06	99,3
x 2	8,31	3,1E-07	0,46	0,005	0,011	0,07	0,004	0,0009	8,87
mi*	1	1	4	17	30	29	14	4	100

15. Обчислити величину критерію χ^2 за формулою $\chi^2=\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{\left(m_i^*-np_i\right)^2}{np_i}$.

Визначити число ступенів свободи $q=\mathrm{k}-3$.

16. На основі аналізу таблиці розподілу χ^2 визначити відповідну імовірність $p_д$ підставі отриманого значення якої зробити висновок щодо відповідності розглянутої сукупності випадкових чисел нормальному закону розподілу.

Приклад 3.

Здійснемо вимірювання часу наробітку на відмову (у роках) 100 елементів. Запишемо результат у вигляді простої статистичної сукупності (списку) X розмірності n = 100 (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Результати вимірювань

-0,127	-0,712	0,341	-1,742	0,200	-0,823	0,991	-0,029	-0,324	-1,627
2,086	1,176	-1,389	0,126	0,740	1,179	0,820	-0,459	-0,504	0,627
-0,768	-0,390	-0,112	1,001	-1,066	-0,101	-0,055	0,250	-1,556	-1,536
0,140	-0,406	-1,323	-0,757	-0,513	-0,939	-1,424	0,781	0,549	-1,657
2,066	0,465	-0,100	0,361	-0,001	-0,244	1,496	-2,604	-3,742	1,214
0,992	-0,584	-0,291	-1,022	-0,370	0,426	0,771	0,120	-1,323	1,554
-0,893	0,788	1,424	-1,565	-0,708	-0,758	0,281	1,741	1,390	-0,392
0,748	0,808	0,999	0,322	-0,680	-0,426	-0,975	0,808	-0,968	-0,607
0,425	0,564	0,634	-0,100	0,928	-1,266	-1,763	1,748	1,316	0,694
-0,058	-0,585	0,748	-0,027	2,209	1,907	-0,180	0,644	0,899	-0,790

Розділимо весь діапазон вимірюваних значень величини x на інтервали, кількість яких визначимо за формулою: $k = 1 + 3.3\lg n \approx 8$.

Обчислимо величину границь інтервалів, якщо $x_{max} = 2{,}209$; $x_{min} = -3{,}742$

$$x_1 = x_{min} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -4{,}167; \qquad x_2 = x_{min} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -3{,}316;$$

$$x_3 = x_2 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -2{,}466; \qquad x_4 = x_3 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -1{,}616;$$

$$x_5 = x_4 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -0{,}766; \qquad x_6 = x_5 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -0{,}083;$$

$$x_7 = x_6 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = 0{,}933; \qquad x_8 = x_7 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = -1{,}783;$$

$$x_9 = x_8 + \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = 2{,}634.$$

Підрахуємо кількість m_i^*, що дорівнює кількості значень величини x, які потрапили в і-й інтервал. Цю кількість поділимо на загальну кількість вимірювань ni знайдемо частоту, що відповідає цьому інтервалу: $p_i^* = \frac{m_i^*}{n}$.

Сума частот усіх інтервалів повинна дорівнювати одиниці.

Побудуємо статистичний ряд, у якому наведені інтервали в порядку їхнього розташування уздовж осі абсцис і відповідні частоти.

Таблиця 6.2 – Статистичний ряд результатів вимірювань

m_i*	1	1	4	17	30	29	14	4	100
Частоти p_i	0,01	0,01	0,04	0,17	0,3	0,29	0,14	0,04	1
Границі інтервалів	-4,167-(-3,316)	-3,316-(-2,466)	-2,466-(-1,616)	-1,616-(-0,766)	-0,766-0,083	0,083-0,933	0,933-1,783	1,783-2,634	

Статистичний ряд накреслимо графічно у вигляді гістограми (рис.6.1). На осі абсцис відкладають інтервали і на кожному з інтервалів будують прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного інтервалу. Для побудови гістограми ділимо частоту кожного інтервалу на його довжину й отримане число беремо за висоту прямокутника.

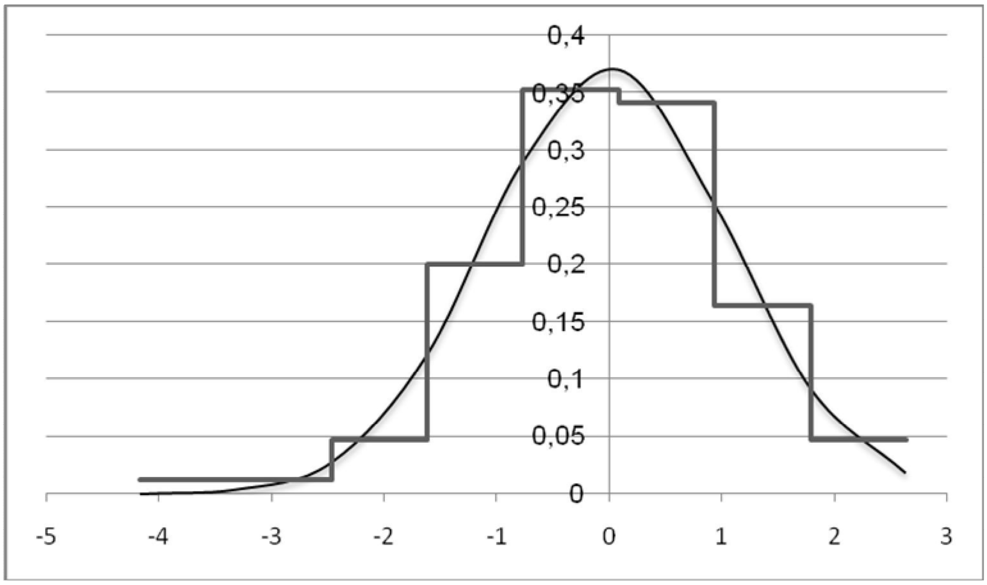

Рисунок 6.1 – Гістограма результатів вимірювань

Візуальна оцінка гістограми дозволяє висунути гіпотезу, що розглянута сукупність випадкових чисел описується нормальним законом розподілу.

Нормальний закон розподілу характеризується щільністю ймовірності

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.27)$$

Параметрами нормального закону розподілу є математичне очікування (середнє вибіркове) m_x і середньоквадратичне відхилення σ_x. Обчислимо їх за формулами:

$$M^*[x]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=m_x^*=-0{,}0086;$$

$$D^*[x]=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}(x_i-m_x^*)^2=1{,}15;$$

$$\sigma^*[x] = \sqrt{D^*[x]} = 1{,}07.$$

Обчислимо довірчий інтервал для оцінки математичного очікування для довірчої ймовірності $\beta = 0{,}8$.

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{D^*}{n}} = 0{,}10;$$

$$\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 1{,}282;$$

$$\varepsilon_\beta = \sigma_{\tilde{m}} \arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 0{,}131;$$

$$I_\beta = \left(\tilde{m} - \varepsilon_\beta ; \tilde{m} + \varepsilon_\beta\right) = (-0{,}139; 0{,}122).$$

Нанесемо на гістограму (рис. 6.1) криву щільності ймовірності нормального закону розподілу, побудовану з урахуванням обчислених параметрів. Оцінимо близькість теоретичного й експериментального розподілів за допомогою критерію χ^2.

Знаходимо імовірності влучення в інтервали за формулою

$$p_i = \Phi^*\left(\frac{x_{i+1} - m_x^*}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_i - m_x^*}{\sigma}\right), \tag{6.28}$$

де x_i, x_{i+1} границі і-го інтервалу.

Помістимо отримані значення в таблицю порівняння.

Таблиця 6.2 – Таблиця порівняння

Границі інтервалів	-4,167-(-3,316)	-3,316-(-2,466)	-2,466-(-1,616)	-1,616-(-0,766)	-0,766-0,083	0,083-0,933	0,933-1,783	1,783-2,634	Σ
p_i	0,0009	0,01	0,05	0,17	0,29	0,27	0,14	0,04	0,99
$p \cdot n_i$	0,097	1,0005	5,6	17,3	29,4	27,5	14,2	4,06	99,3
x^2	8,31	3,1E-07	0,46	0,005	0,011	0,07	0,004	0,0009	8,87
m_i*	1	1	4	17	30	29	14	4	100

Обчислимо величину χ^2 за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\left(m_i^* - np_i\right)^2}{np_i} = 8{,}87.$$

Число ступенів свободи r дорівнює
$q = k - 3 = 5.$

Висновок. (Проаналізувати таблицю розподілу χ^2 та на підставі отриманого значення $p_д$ визначити, чи підкоряється розглянута сукупність випадкових чисел нормальному закону розподілу).

Контрольні запитання

1. Що таке імовірність випадкової величини (події) *x*

2. Дайте визначення поняттю «математичне очікування».
3. Дайте визначення поняттям «дисперсія, розмах ряду розподілу».
4. Дайте визначення поняттю «коефіцієнта варіації».
5. Як визначити число ступенів ряду розподілу
6. Що таке «Закон нормального розподілу»
7. Як будується гістограма ряду розподілу
8. Назвіть параметри закону нормального розподілу

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Рой В. Ф. Конспект лекцій з дисципліни «Основи наукових досліджень» / Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. − 123 с.

2. Методы исследований и организация эксперимента. / под ред. К. П. Власова. – Харьков : Изд-во «Гуманитарный центр», 2002. − 255 с.

3. Баскаков А. Я. Методология научного исследования: учеб. пособие. / А. Я. Баскаков, Н. В. Туленков. – Киев : МАУП, 2002. – 214 с.

4. Белуха Н. Т. Методологія наукових досліджень. Підручник. − Київ : АБУ, 2002. – 480 с.

5. Грушко И. М. Основы научных исследований / И. М. Грушко, В. М. Сиденко. – Харьков : Высшая школа, 1999. – 224 с.

6. Основы научных исследований / под ред. В. И. Крутова, В. В. Попова. − Москва : Высшая школа, 1989. − 400 с.

7. Чяпяле Ю. М. Методика поиска изобретательской идеи. / Ленинград : Машиностроение. – 1990. − 91 с.

8. Власов К. П., Теория автоматического управления (специальные методы). / К. П. Власов, А. С. Анашкин. – С-Пб. : Горный институт, 2001. – 265 с.

9. Пилюшенко В. Л. Методология и организация научного исследования. – Москва : Наука, 2002. – 126 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни

«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»

(для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 6.050701 – Електротехніка та електротехнології)

Укладачі: **РОЙ** Віктор Федорович,
КОВАЛЬОВА Юлія Вікторівна

Відповідальний за випуск *Д. М. Калюжний*
За авторською редакцією *О. А. Норик*
Комп’ютерне верстання *Ю. В. Ковальова*

План 2016, поз. 512 М

Підп. до друку 21.11.2016 р. Формат 60х84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 1,2
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.